158 :

Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

# Définition et exemple

## Définitions

Formellement, on définit une action d’un groupe G sur un ensemble E par une loi externe de G\*E sur E, avec noté ou g(x) ou gx, qui vérifie la relation de compatibilité suivante . On dit alors que G est un groupe opérant sur l’ensemble E. Cette définition est équivalente au fait de se donner un homomorphisme de G vers l’ensemble des bijections de E. Le lien entre les deux définitions étant .

## Exemples

Un premier exemple de groupe opérant sur un ensemble sont données dans la définition d’un espace affine. La relation de compatibilité s’appelant la relation de Chasles.

Dans le même ordre d’idée, nous avons, pour un espace vectoriel sur un corps, le groupe multiplicatif d’un corps qui opère sur

Un autre exemple sont données par les systèmes dynamiques réversibles. Ceux sont formés l’action de sur un ensemble M dit espace des phases. M peut être dans le cas de l’étude d’un point matériel. Ces systèmes dynamiques sont dits continus. Nous avons aussi les systèmes dynamiques discrets en considérant l’action de sur un ensemble E.

Citons encore celui des manipulations sur un Rubik’s cube.

Le groupe de Poincaré sur les fibres d’un revêtement.

Le groupe de Galois sur les racines d’un polynôme.

## Transformations

Par espace géométrique, on entend une partie non vide d’un espace affine euclidien de dimension finie.

Une transformation géométrique est une application bijective d’un espace géométrique E vers lui-même.

Des exemples de transformations géométriques sont les homothéties (dont le rapport est non nul), les translations, les rotations, les symétries axiales.

## Orbites

L’orbite d’un élément est l’ensemble de ses images par toutes les transformations . C’est l’ensemble , noté .

Deux éléments x et y de E seront dit, sous l’action d’un groupe G, équivalents s’ils appartiennent à la même orbite.

Formule des classes

Formule de Burnside